JAK ZMIENI SIĘ WARTOŚĆ FUNKCJI $y=f(x)$ NA SKUTEK MAŁEGO WZROSTU ZMIENNEJ NIEZALEŻNEJ x ?

RÓŻNICZKA FUNKCJI $y=f(x)$

MÓWI NAM O PRZYBLIŻONEJ WARTOŚCI PRZYROSTU Δy FUNKCJI y

JEŻELI ZMIENNA NIEZALEŻNA x

WZROŚNIE O MAŁE Δx

ELASTYCZNOŚĆ FUNKCJI $y=f(x)$

MÓWI NAM O ILE % WZROŚNIE WARTOŚĆ FUNKCJI y

JEŻELI ZMIENNA NIEZALEŻNA x

WZROŚNIE O 1%

ELASTYCZNOŚĆ FUNKCJI *y=f(x)*

Elastycznością funkcji *y=f(x)* ze względu na zmienną niezależną *x* nazywamy granicę ilorazu względnego przyrostu wartości funkcji (Δy / *y*) do względnego przyrostu zmiennej niezależnej (Δx / *x*), tj.

$$E_y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot f'(x)$$

PRZYKŁAD 1 **Dla funkcji liniowej *y=3x-6* elastyczość wynosi**

$$E_y = \frac{x}{y} \cdot f'(x) = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{x}{x-2}$$

Przy *x*=10 wartość funkcji wynosi *y=f(10)*=3 10−6=24, a elastyczność E_y=10/8=1.2

Elastyczność interptetujemy następująco:

Jeżeli zmienna niezależna *x* wzrośnie z aktualnego poziomu (10) o *1%*

tj. o *0.01* •10 = 0.1

to wartość funkcji wzrośnie z aktualnego poziomu (24) o *1.2%*

tj. o *0.012* •24 = 0.288

Przy *x*=6 wartość funkcji wynosi *y=f(6)*=3•6−6=12, a elastyczność E_y=6/4=1.5.

Wniosek : Elastyczność funkcji liniowej <u>nie jest</u> stała.
Zależy od poziomu zmiennej niezależnej *x* .

PRZYKŁAD 2 **Dla funkcji potęgowej** $y = 2x^3$ **elastyczość wynosi**

$$E_y = \frac{x}{y} \cdot f'(x) = \frac{x}{2x^3} \cdot 6x^2 = \frac{6x^3}{2x^3} = 3$$

Wniosek : Elastyczność funkcji potęgowej <u>jest</u> stała.
Nie zależy od poziomu zmiennej niezależnej *x* .

RÓŻNICZKA FUNKCJI *y=f(x)*

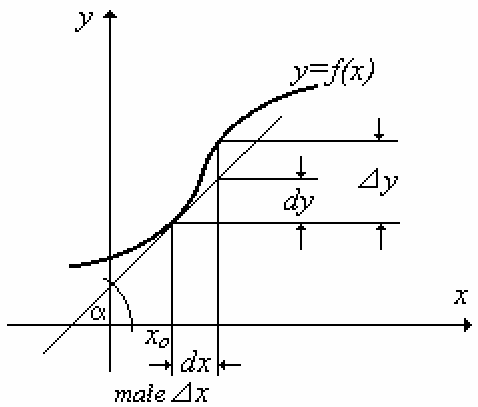
Różniczką dy funkcji $y=f(x)$ nazywamy iloczyn pochodnej $f'(x)$ przez dowolny przyrost Δx zmiennej niezależnej x, tj.

$$dy = f'(x)\cdot \Delta x$$

Różniczka funkcji służy do przybliżonego obliczania przyrostu funkcji, gdy przyrost zmiennej niezależnej jest dostatecznie mały.

Przybliżony przyrost funkcji Δy, gdy zmienna niezależna x wzrasta z pewnego poziomu x_0 wynosi

$$\Delta y\Big|_{x_0} \approx f'(x_0)\cdot \Delta x \qquad (\Delta x \to 0)$$



Wynika stąd, że $$\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta y - dy) = 0$$

PRZYKŁAD 1 Dla funkcji liniowej $y=3x-6$ różniczka ma postać

$$dy = f'(x)\cdot \Delta x = (3x-6)'\cdot \Delta x = 3\cdot \Delta x$$

Wniosek : Różniczka funkcji liniowej jest stała i dokładnie odpowiada przyrostowi funkcji.

PRZYKŁAD 2 Dla funkcji potęgowej $y = 2x^3$ różniczka wynosi

$$dy = (2x^3)'\cdot \Delta x = 6x^2\cdot \Delta x$$

Wniosek : Różniczka funkcji potęgowej jest funkcją.

Np. przy $x_0=2$ i $\Delta x=0.01$ mamy

$\Delta y \approx 6\cdot 2^2\cdot 0.01 = 0.24$ **podczas gdy** $\Delta y = 2x^3\Big|_{2}^{2.01} = 16.241202 - 16 = 0.241202$

a przy $x_0=10$ i $\Delta x=0.01$ mamy

$\Delta y \approx 6\cdot 10^2\cdot 0.01 = 6$ **podczas gdy** $\Delta y = 2x^3\Big|_{10}^{10.01} = 2006.006 - 2000 = 6.006$

TEMPO WZROSTU FUNKCJI y=f(x)

Iloraz

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}$$

nazywamy średnim tempem wzrostu funkcji y=f(x) w przedziale <x_0, $x_0+\Delta x$>

Granicę

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\Delta x} = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

nazywamy tempem wzrostu funkcji w punkcie x_0.

Przykład 1

Dla funkcji liniowej y=3x-6

tempo wzrostu funkcji w punkcie x_0=10 wynosi

$$\left.\frac{(3x-6)'}{3x-6}\right|_{x=x_0=10} = \left.\frac{3}{3x-6}\right|_{x=x_0=10} = \frac{3}{3\cdot 10-6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Przykład 2
Dla funkcji potęgowej $y=2x^3$ tempo wzrostu funkcji w punkcie $x_0=2$ wynosi

$$\left.\frac{\left(2x^3\right)'}{2x^3}\right|_{x=x_o=2} = \left.\frac{6x^2}{2x^3}\right|_{x=x_0=2} = \left.\frac{3}{x}\right|_{x=x_0=2} = \frac{3}{2}$$